Nilsa Fonseca Sousa

Licenciada

Método de Bootstrap e Teoria da Credibilidade na Estimativa das Provisões para Sinistros

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Matemática e Aplicações, no ramo Actuariado, Estatística e Investigação Operacional

Orientador: Maria de Lourdes Belchior Afonso,
Professora Doutora Auxiliar,
Faculdade de Ciências e Tecnologias
da Universidade Nova de Lisboa
Co-orientador: Pedro Alexandre da Rosa Corte Real,
Professor Doutor Auxiliar,
Faculdade de Ciências e Tecnologias
da Universidade Nova de Lisboa

Presidente: Prof. Doutor Manuel Leote Tavares Inglês Esquivel
Arguente: Prof. Doutora Gracinda Rita Diogo Guerreiro
Vogais: Prof. Doutora Maria de Lourdes Belchior Afonso
Prof. Doutor Pedro Alexandre da Rosa Corte Real

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Junho 2011

Método de Bootstrap e Teoria da Credibilidade na Estimativa das Provisões para Sinistros

Nilsa Fonseca Sousa

Agradecimentos

Em primeiro lugar começo por agradecer aos meus orientadores, a Professora Doutora Maria de Lourdes Afonso e o Professor Doutor Pedro Corte Real pelo apoio, orientação, disponibilidade, compreensão e preocupação demonstrados na elaboração deste trabalho.

Um muito obrigado à minha mãe e aos meus irmãos pelo enorme apoio, carinho, dedicação, preocupação e compreensão demonstrados no percurso da minha vida.

Não podia deixar de agradecer aos meus colegas e aos meus amigos pelo enorme apoio e disponibilidade imprescindíveis na realização deste trabalho, em particular à Adalgiza Fonseca pela sua preciosa colaboração prestada na fase final desta dissertação.

Agradeço ainda à Doutora Teresa Fernandes, ao Doutor Miguel Coelho e à Doutora Maria Antónia Gonçalves do Montepio Geral - Associação Mutualista pelo apoio constante e compreensão imprescíndiveis na finalização deste trabalho.

Uma palavra de agradecimento a todos os que de algum modo deram a sua contribuição, nomeadamente o Instituto de Seguros de Portugal, pelo fácil acesso aos dados.

Resumo

A adequação das provisões técnicas é objecto de estudo por parte das próprias Seguradoras. A não constituição de provisões adequadas pode comprometer a solvência das mesmas.

De entre os vários tipos de provisões, as provisões para sinistros têm uma grande relevância nas contas dos ramos não vida. Existem vários métodos, tanto determinísticos como estocásticos, para a sua determinação. Dos modelos determinísticos, o modelo de Chain Ladder é o mais conhecido e utilizado. No entanto, a aplicação de modelos estocásticos tem vindo a aumentar. A principal vantagem é a obtenção de intervalos de confiança para a estimativa da provisão.

No presente trabalho pretende-se aplicar a Teoria da Credibilidade e o método de Bootstrap ao cálculo de provisões para sinistros do ramo automóvel com respectiva comparação de resultados obtidos.

PALAVRAS CHAVE: Provisões para sinistros, Chain Ladder, Bootstrap, Teoria da Credibilidade.

Abstract

The adequacy of technical reserves is a subject studied by the insurers. Not having adequate reserves can threaten their solvency.

Among the various types of reserves, the loss reserves have a great relevance in the accounting of non-life insurance companies. There are several loss reserving types of methods, deterministic and stochastic. Among the deterministic models, the Chain Ladder is the most widely used. However the application of stochastic models has been increasing. The main advantage of using stochastic models is to obtain confidence intervals for the estimate of loss reserving.

This work aims to apply the Credibility Theory and Bootstrap method to estimate the loss reserves for the motor insurance .

KEYWORDS: Claims reserving, Chain Ladder, Bootstrap, Credibility Theory.

Índice

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Introdução

As Seguradoras devem constituir e manter provisões técnicas adequadas que lhes permitam garantir o cumprimento das responsabilidades futuras assumidas perante os segurados e terceiros. De todas as provisões técnicas do ramo não vida, a maior preocupação é com as provisões para sinistros, devido ao custo associado aos sinistros ainda não participados e, também, à regularização dos sinistros já ocorridos mas ainda em aberto.

Existem várias técnicas, tanto determinísticas como estocásticas, para a estimação da provisão para sinistros. As técnicas determinísticas são as mais utilizadas pelas Seguradoras, devido à sua simplicidade e eficácia. No entanto, da aplicação destes métodos resulta apenas uma estimativa pontual para a provisão para sinistros, sendo esta estimativa muito sensível a qualquer alteração nos dados. Os métodos estocásticos surgiram da necessidade de uma medida que traduzisse a variabilidade das estimativas da provisão produzindo maior flexibilidade e rigor na interpretação dos resultados. Assim, a grande vantagem da introdução destes métodos é a obtenção de erros de previsão e intervalos de confiança que são medidas de variabilidade muito importantes na análise da adequabilidade das provisões estimadas.

A presente dissertação encontra-se dividida em cinco capítulos e tem como objectivo a aplicação do método de Bootstrap e da Teoria da Credibilidade no contexto das provisões para sinistros utilizando como referência a teoria subjacente aos métodos determinísticos Chain-Ladder e Bornhuetter-Ferguson e ao modelo estocástico Poisson Sobre-dispersão.

No primeiro capítulo, são apresentados alguns conceitos básicos relativos ao desenvolvimento do trabalho, nomeadamente o processo de um sinistro e as provisões para sinistros. Na secção das provisões para sinistros é introduzida a estrutura dos dados utilizados e efectuada uma breve introdução sobre os métodos utilizados na estimação das provisões.

No segundo capítulo, apresenta-se a formulação dos métodos determínisticos Chain Ladder e Bornhuetter-Ferguson e a descrição de um modelo de projecção da cauda para os dados, utilizado nos casos de existência de processos de sinistros em aberto, no final do exercício.

No terceiro capítulo, elabora-se uma breve introdução sobre a Teoria da Credibilidade e o método de credibilidade Benktander descrito por [Neuhaus, 1992].

No quarto capítulo, apresenta-se o método de Bootstrap, como uma técnica de simulação. Na primeira secção deste capítulo, faz-se uma breve descrição do modelo de Poisson Sobre-dispersão procedendo-se, posteriormente, à apresentação da técnica de simulação Bootstrap. Também são apresentados a estimação dos intervalos de confiança e do custo final das provisões para sinistros.

O quinto capítulo corresponde à análise e discussão dos resultados práticos obtidos através da aplicação dos métodos abordados na presente dissertação, com excepção do modelo de Poisson Sobre-dispersão, apresentado apenas como método de associação para o método de Bootstrap. Para a aplicação prática dos métodos, são considerados os dados referentes ao exercício 2009, relativos ao ramo automóvel, que constam no relatório “Estatísticas de Seguros” do Instituto de Seguros de Portugal (ISP).

Capítulo 1

Conceitos Elementares

A temática em estudo centra-se no ramo não vida. Os seguros do ramo não vida são contratos celebrados entre a Seguradora e o Segurado, através do qual a Seguradora se compromete a pagar uma indemnização ou o capital seguro, em caso de ocorrência de sinistros, recebendo, em contrapartida, o prémio correspondente. Ao assumir a responsabilidade sobre os sinistros ocorridos, a Seguradora deve provisionar os custos associados, no final de cada exercício. Estes custos são designados de provisões técnicas e têm uma grande relevância na contas do ramo não vida pois representam a solvabilidade das Seguradoras. As provisões técnicas dividem-se em provisões para sinistros, provisões para prémios não adquiridos, provisões para participação nos resultados e provisões para riscos em curso, sendo as provisões para sinistros as que detêm o maior peso.

Neste capítulo, serão descritos o processo de sinistro, os tipos de provisões para sinistros bem como os métodos e o formato dos dados utilizados na sua estimação.

1.1 Processo de Sinistro

A Figura 1.1 representa a evolução do processo de sinistro desde a ocorrência até o encerramento.

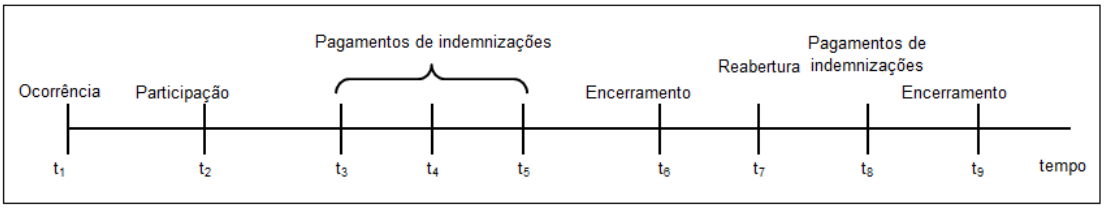

Figura 1.1: Evolução temporal do processo de sinistro

Conforme se pode observar, o processo tem início no instante da sua ocorrência, t_1. A existência desse acontecimento será participado, à Seguradora, no instante t_2. Os pagamentos das indemnizações associadas aos sinistros ocorridos serão feitos entre os instantes t_3 e t_5. Após a regularização desses pagamentos, o processo é encerrado no instante t_6. Este encerramento não é, necessariamente, definitivo pois pode surgir a necessidade de reabrir o processo, sendo esta operação realizada no instante t_7. No instante t_8 são feitos os novos pagamentos e o processo é, novamente, encerrado no instante t_9.

Geralmente, os sinistros participados num determinado período não são liquidados nesse mesmo período. Tais atrasos, derivam, por exemplo, de longos processos jurídicos, atrasos administrativos, alterações na legislação, entre outros factores.

É de salientar que o processo pode ser reaberto mais do que uma vez. Uma das causas que pode justificar as reaberturas do processo é a existência de informações incompletos e/ou incoerentes à data de encerramento.

1.2 Provisão para Sinistros

"A provisão para sinistros corresponde ao custo total estimado que a empresa de seguros suportará para regularizar todos os sinistros que tenham ocorrido até ao final do exercício, quer tenham sido comunicados ou não, após dedução dos montantes já pagos respeitantes a esses sinistros", (Decreto Lei nº 94-B/98, de 17 de Abril). No final do exercício 2009, segundo [ISP, 2009], as provisões para sinistros representavam 78% do total das provisões técnicas do ramo Automóvel, conforme se pode observar na Figura 1.2, o que mostra que as provisões para sinistros constituem a maior parte do passivo das provisões técnicas.

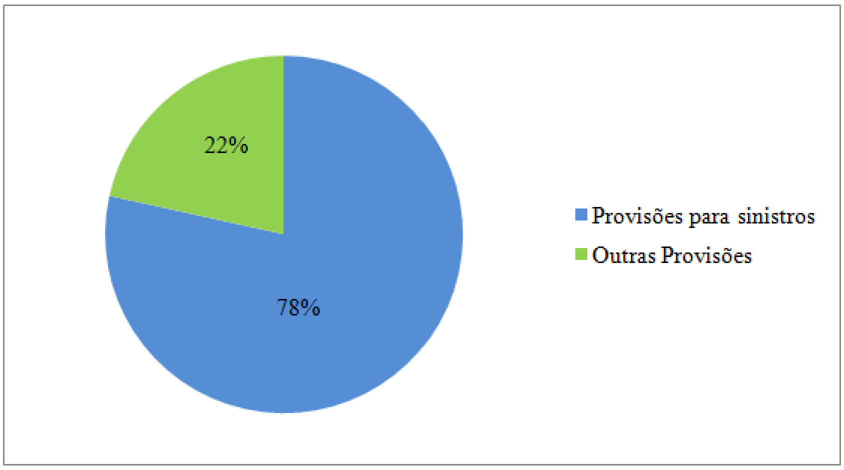

Figura 1.2: Distribuição percentual das provisões técnicas

As provisões para sinistros dividem-se em dois tipos de provisões: provisões para sinistros IBNR (*Incurred But Not Reported*) e provisões para sinistros IBNER (*Incurred But Not Enough Reported*).

Os custos estimados destinados à regularização das indemnizações associadas aos sinistros ocorridos mas que, na data do apuramento das responsabilidades, ainda não foram participados à Seguradora, são designados de provisões para sinistros IBNR.

As provisões para sinistros IBNER são os custos estimados para regularizar os sinistros pendentes ou que possam vir a ser reabertos, ou seja, os sinistros participados mas não pagos na totalidade.

Graficamente, os sinistros IBNR situam-se entre os instantes t_1 e t_2 da Figura 1.1 e os sinistros IBNER situam-se entre os instantes t_2 e t_9, assumindo que o processo não volta a ser reaberto após o instante t_9.

1.2.1 Dados Utilizados

Os dados utilizados na estimação das provisões para sinistros são validados, organizados e apresentados sob a forma de uma matriz incompleta, designada de Triângulo de Desenvolvimento ou *Run-off*, conforme a Tabela 1.1. Esta matriz contém a informação relativa ao histórico dos sinistros ocorridos e participados, à data da estimação.

Período de	Período de Desenvolvimento								
Ocorrência	0	1	2	...	j	...	n-1	n	∞
0	$X_{0,0}$	$X_{0,1}$	$X_{0,2}$	...	$X_{0,j}$	...	$X_{0,n-1}$	$X_{0,n}$	$X_{0,\infty}$
1	$X_{1,0}$	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$	...	$X_{1,j}$	...	$X_{1,n-1}$		
2	$X_{2,0}$	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$	...	$X_{1,j}$	...			
...	...	...	...	...	...				
i	$X_{i,0}$	$X_{i,1}$	$X_{i,2}$	...					
...	...	...	...						
n-1	$X_{n-1,0}$	$X_{n-1,1}$							
n	$X_{n,0}$								

Tabela 1.1: Triângulo de desenvolvimento

As quantidades $X_{i,j}$, com $i = \{0, \ldots, n\}$ e $j = \{0, \ldots, \infty\}$, podem representar o montante total ou a média das indemnizações pagas, o número de sinistros declarados, o número de sinistros pagos, o montante dos prémios ou, ainda, o número de apólices. Cada linha da matriz representa um "período de ocorrência" de sinistros e as colunas correspondem aos "períodos de liquidação" ou pagamento das indemnizações de sinistros. As diagonais da matriz são os "períodos calendários", ou seja, períodos em que são feitos os pagamentos. A última coluna, ∞, é designada por *ultimate* e contém a informação relativa a todos os sinistros ocorridos, mas cuja regularização só será feita passados os n "períodos de desenvolvimento", sendo n o último período de registo de sinistros ocorridos. Na maioria dos casos, esta informação é uma estimativa. Caso o número de períodos de desenvolvimento seja significativo, não se espera que o número de sinistros por regularizar seja considerável, assim a Seguradora já terá conhecimento casuístico dos processos envolvidos e dos montantes a pagar com algum rigor.

Sem perda de generalidade, considera-se cada período como sendo um ano.

A matriz aqui apresentada é a matriz padrão utilizada no desenvolvimento das técnicas de estimação. No entanto, existem outras formas de apresentar os dados conforme se pode observar, por exemplo, em [Taylor, 2000].

A matriz da Tabela 1.1 possui duas estruturas possíveis: uma incremental e outra acumulada. A estrutura incremental corresponde às quantidades observadas no ano de desenvolvimento j e no ano de ocorrência i e é representada por $X_{i,j}$, com $i = \{0, \ldots, n\}$ e $j = \{0, \ldots, \infty\}$. A estrutura acumulada, representada por $C_{i,j}$, corresponde às quantidades do ano de ocorrência i, acumuladas até o final do ano de desenvolvimento j, ou seja, à soma das quantidades incrementais, $X_{i,j}$, ao longo dos anos de desenvolvimento. Simbolicamente, tem-se:

$$C_{i,j} = \sum_{k=0}^{j} X_{i,k}, \;\; 0 \leq i \leq n \text{ e } 0 \leq j \leq \infty. \tag{1.1}$$

As quantidades consideradas no âmbito da aplicação dos métodos de estimação, nesta dissertação, são os montantes das indemnizações. Assim, as estimativas das provisões para sinistros, associadas a cada um dos anos de ocorrência i, podem ser obtidas com base nos montantes acumulados, sendo definidas por:

$$\widehat{R}_i = \widehat{C}_{i,\infty} - C_{i,n-i}, \;\; 0 \leq i \leq n \tag{1.2}$$

ou, nos montantes incrementais, sendo dadas por:

$$\widehat{R}_i = \sum_{j=n+1-i}^{\infty} \widehat{X}_{i,j}, \;\; 0 \leq i \leq n \tag{1.3}$$

onde $\widehat{C}_{i,\infty}$ são os montantes acumulados, no final do exercício, e $\widehat{X}_{i,j}$ são os montantes incrementais estimados.

O valor da provisão total, estimada, é dada por $\widehat{R} = \sum_{i=0}^{n} \widehat{R}_i$.

1.2.2 Técnicas de Estimação

As estimativas das provisões para sinistros podem ser obtidas pelo método caso a caso ou por métodos estatísticos, baseando-se na natureza dos sinistros e no histórico da Seguradora ou do mercado segurador envolvente.

O método caso a caso consiste na estimação individual das provisões para cada processo de sinistro e exige o conhecimento do sinistro em causa. Este método é mais adequado para os casos em que não existem dados suficientes e/ou com características desejáveis para aplicar os métodos estatísticos. Nesta situação cabe ao gestor de sinistros a indicação do montante a provisionar.

Quando o número de sinistros de uma carteira for suficientemente grande, recorrem-se aos vários métodos estatísticos para determinar as estimativas das provisões para sinistros. A selecção do método estatístico depende, essencialmente, do impacto que os vários factores, externos ou internos, podem vir a ter na estimação da provisão, da homogeneidade do conjunto de dados disponíveis e da qualidade estatística dos estimadores[1] . Como é expectável, o grau de precisão do valor estimado aumenta com a diminuição das oscilações dos sinistros da carteira.

O principal objectivo da aplicação de uma técnica de estimação é determinar os valores abaixo da diagonal principal da matriz apresentada na Tabela 1.1, ou seja, estimar o valor de $\widehat{X}_{i,j}$, com $i + j > n$.

Nos capítulos que se seguem são descritos alguns dos métodos utilizados para a estimação das provisões, nomeadamente o tradicional Chain Ladder determinístico, o método de Bootstrap e a Teoria de Credibilidade.

[1] Os estimadores considerados mais adequados são os estimadores de máxima verosimilhança. Apesar de nem sempre serem centrados, são, em condições gerais, consistentes e assimptoticamente Normais. (Para mais detalhe consultar [Cabral and Guimarães, 1997])

Capítulo 2

Estimação determinística das provisões para sinistros

Neste capítulo, são apresentados os métodos determinísticos Chain Ladder (CL) e Bornhuetter-Fergunson (BF). A teoria subjacente a estes métodos é utilizada na formulação de outros métodos, nomeadamente, a Teoria da Credibilidade que será apresentada no Capítulo 3.

O método CL e o método BF são, as técnicas determinísticas mais conhecidas e utilizadas. Segundo [Taylor, 2000], o método CL foi introduzido por Harnek em 1966. Por vezes, só se recorre a outros métodos de estimação quando estes métodos não produzem resultados satisfatórios ou, então, para determinar os desvios padrão ou erros de previsão das estimativas.

Alguns métodos de estimação consideram que o Triângulo de Desenvolvimento está completo, isto é, não se esperam mais encargos associados aos sinistros ocorridos no primeiro ano. Em algumas situações, como o caso de estudo do presente trabalho, tal não acontece. Assim, surge a necessidade de estimar a chamada "cauda dos dados" ou *ultimate*. Na Secção 2.3, apresenta-se um modelo para estimar o factor cauda, que Neuhaus utilizou nos modelos determínisticos em [Neuhaus, 2008]. Este modelo vai ser posteriormente aplicado, também, ao método de Bootstrap, apresentado no Capítulo 4.

2.1 O método Chain Ladder (CL)

O método CL assenta no pressuposto de que o padrão de pagamento para cada ano de ocorrência, num determinado ano de desenvolvimento, é estável. Tem servido de base para o desenvolvimento de muitos métodos estocásticos nomeadamente a versão publicada em [Mack, 1993] e, mais tarde, numa versão mais completa em [Mack, 1994].

2.1.1 Formulação

O método CL consiste em estimar o triângulo inferior da matriz apresentada na Tabela 1.1, com base nos montantes acumulados no final do exercício:

$$\widehat{C}_{i,j} = C_{i,j-1} \times \widehat{f}_{j-1}, \;\; \text{com} \;\; i + j > n \tag{2.1}$$

onde $\widehat{f_j}$ são os coeficientes de desenvolvimento definidos na forma:

$$\widehat{f_j} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j}}, \;\; 0 \leq j \leq n-1 \tag{2.2}$$

$$\widehat{f}_n = \frac{C_{0,\infty}}{C_{0,n}}. \tag{2.3}$$

Nestas condições, as estimativas obtidas para as provisões para sinistros associadas a cada ano de ocorrência i, $\widehat{R}_i$, são dadas por:

$$\widehat{R}_i = \widehat{C}_{i,\infty} - C_{i,n-i}, \;\; 0 \leq i \leq n. \tag{2.4}$$

Em termos incrementais, tem-se que:

$$\begin{aligned} \widehat{R}_i &= \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{X}_{i,j} - \sum_{j=0}^{n-i} X_{i,j} \\ &= \sum_{j>n-i} \widehat{X}_{i,j}, \qquad 0 \leq i \leq n. \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2 O método Bornhuetter-Ferguson (BF)

Este método apareceu pela primeira vez nos trabalhos de Bornhuetter e Ferguson, em 1972, segundo [Mack, 2008], e apresenta uma formulação idêntica à formulação do método CL. O método procura não correlacionar o montante total das indemnizações, no final do exercício, com as estimativas das provisões para sinistros e combina a experiência relativa ao pagamento das indemnizações com informações exteriores inerentes ao mercado, nomeadamente, a taxa de sinistralidade, o volume de prémios, o número de contratos existentes.

No que se segue utilizar-se-á a abordagem apresentada em [Neuhaus, 2008].

2.2.1 Formulacão

Considera-se que os coeficientes de desenvolvimento do método são representados por $\pi_0, \cdots, \pi_n$.

Neste modelo, os montantes incrementais ou acumulados não são suficientes para estimar os parâmetros $\pi_0, \cdots, \pi_n$, sendo necessário introduzir uma medida de exposição ao risco como, por exemplo, o volume de prémios emitidos ou o número de contratos existentes.

Sejam $p_0, \cdots, p_n$ os montantes dos prémios emitidos, associados aos anos de ocorrência e $\theta_0, \cdots, \theta_n$ as taxas de sinistralidade dos anos de desenvolvimento. Os prémios emitidos são dados *a priori* e os parâmetros θ_j, $j = 0, \cdots, n$, designados de parâmetros de risco, são estimados.

Este método assume que as taxas de sinistralidade são constantes para os todos os anos de desenvolvimento e identicamente iguais a θ.

O estimador de θ, θ^*, obtido pelo método da máxima verosimilhança, é definido por:

$$\theta^* = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{S_j}{p_j} \right) \tag{2.6}$$

com $S_j = \sum_{i=0}^{n-j} X_{i,j}$ e $p_j = \sum_{i=0}^{n-j} p_i$, para $j = \{0, \dots, n\}$.

Os estimadores dos coeficientes de desenvolvimento incrementais, π_j^*, são dados por:

$$\pi_j^* = \frac{S_j}{p_j \cdot \theta^*}, \quad 0 \leq j \leq n \tag{2.7}$$

com

$$\sum_{j=0}^{n} \pi_j^* = 1. \tag{2.8}$$

As estimativas dos montantes incrementais futuros são, então, obtidas por:

$$X_{i,j}^* = p_i \cdot \pi_j^* \cdot \theta^* = p_i \cdot \frac{S_j}{p_j}, \quad i + j > n. \tag{2.9}$$

Assim, as estimativas das provisões são dadas por:

$$\widehat{R}_i = \sum_{j=n+1-i}^{n} X_{i,j}^*, \quad 0 \leq i \leq n. \tag{2.10}$$

2.3 Projecção do Factor Cauda ou *Ultimate*

Alguns métodos de estimação assumem que os sinistros relativos ao primeiro ano de ocorrência, estão completamente participados no final do exercício. No entanto, existem ramos, nomeadamente o ramo automóvel, em que os sinistros relativos ao primeiro ano de ocorrência são participados num período posterior ao exercício e em que os pagamentos, nomeadamente de danos corporais, se arrastam ao longo de muitos exercícios. Esta situação deverá ser incorporada na estimação da evolução das indemnizações futuras, pois, caso contrário, poderá levar a estimativas de provisões para sinistros pouco adequadas à realidade da Seguradora. Assim, as estimativas finais são recalculadas baseando-se no factor cauda, obtido através da projecção dos coeficientes de desenvolvimento, durante um número considerável de anos de desenvolvimento.

Seja n o último ano de desenvolvimento com registo de indemnizações pagas. Suponha-se que $\widehat{g}_j$, com $j > n-1$, representa os coeficientes de desenvolvimento projectados e que, para $j \leq n-1$, $\widehat{g}_j = \widehat{f}_j$, onde $\widehat{f}_j$ são os coeficientes definidos pela equação (2.2).

Segundo a metodologia descrita em [Neuhaus, 2008], os coeficientes de desenvolvimento para a cauda, $\widehat{g}_j$, com $j > n-1$, podem ser definidos por:

$$\widehat{g}_j = 1 + \delta \cdot (\widehat{g}_{j-1} - 1) \tag{2.11}$$

onde δ é um valor entre 0 e 1. Este valor será obtido de acordo com a informação disponível, considerando vários cenários para o índice de partida do $\widehat{g}_j$, para o δ e tendo em consideração a experiência do Actuário.

As estimativas das provisões para sinistros são, agora, determinadas utilizando a mesma formulação do método original.

Salienta-se que a projecção não tem de começar, necessariamente, no ano de desenvolvimento n, podendo ser considerado um coeficiente de ajustamento de partida inferior ao ano de desenvolvimento $n-1$, se este se mostrar mais conveniente. A escolha dos coeficientes de desenvolvimento dependem da opinião crítica do Actuário.

O número de anos de desenvolvimento e o parâmetro δ, a considerar na projecção, podem ser obtidos com base na análise da evolução dos coeficientes de desenvolvimento projectados, considerando diferentes valores para δ e vários números de anos de desenvolvimento.

Este modelo não é unico, podendo o Actuário optar por definir outras metodologias, de projecção do *ultimate*, que permitem uma melhor *performance* das estimativas obtidas. No método BF foi necessário prolongar a cauda de outra forma para projectar o quociente $\dfrac{S_j}{p_j}$ que não tem o mesmo comportamento que $\widehat{f}_j$.

Atendendo ao comportamento do referido quociente, resulta natural estimar um modelo regressivo do tipo $y = a + b\ln(x)$ aos quocientes $\dfrac{S_j}{p_j}$, $j = 0, \cdots, n$, como se pode observar na secção 5.2.2.

Capítulo 3

Teoria da Credibilidade

3.1 Generalidades

Segundo [Norberg, 2004], a Teoria da Credibilidade é um método estatístico, desenvolvido em meados do século XX, para tarifar os prémios dos riscos de uma determinada carteira, para o ano $t+1$, com base na informação disponível no ano t e nas características globais e específicas do conjunto de riscos que compõem a carteira. Este método aplica um factor de ponderação, designado de factor de credibilidade, entre a média individual de cada um dos riscos e a média global da carteira, sob a hipótese de que os riscos são agrupados em classes homogéneas e que, dentro de cada classe, existem determinadas características específicas que não podem ser ignoradas. O factor de credibilidade expressa, assim, o grau de confiança a atribuir às médias individuais e globais da carteira.

Geralmente, a Teoria da Credibilidade é aplicada com base no número ou montante agregado das indemnizações.

Suponha-se a existência de uma carteira com k riscos e t anos de registo de indemnizações, representada pela variável $X = (X_{i,j})_{0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq t}$ e que as variáveis $X_{i,j}$ correspondem aos montantes agregados das indemnizações geradas pelos riscos $i = 1, \ldots, k$ e pagas no ano $j = 1, \ldots, t$.

A expressão genérica para determinar os prémios de risco é definida por:

$$Z\overline{X}_i + (1 - Z)\overline{X}, \quad 0 \leq i \leq k \tag{3.1}$$

Onde:

Z é o factor de credibilidade e varia entre 0 e 1;

$\overline{X}_i = \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} X_{i,j}$ é a média das indemnizações de cada um dos riscos, $i = 1, \ldots, k$;

$\overline{X} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\overline{X}_i$ é a média global das indemnizações da carteira.

A expressão definida em (3.1) é designada por fórmula de credibilidade.

O factor de credibilidade, Z, é um parâmetro desconhecido que pode ser estimado por modelos paramétricos como, por exemplo, o modelo Poisson, o modelo Gama e o modelo Normal. Esse parâmetro também pode ser estimado por modelos não paramétricos, nomeadamente os modelos desenvolvidos por [Bühlmann, 1967] e por [Bühlmann and Straub, 1970], sendo o primeiro modelo um caso particular do segundo modelo. Algumas das teorias desenvolvidas sobre os referidos modelos de estimação podem ser consultadas em [Bülhmann and Gisler, 2005] e [Denuit et al., 2008], entre outras literaturas.

Para além da tarifação de prémios, a Teoria da Credibilidade tem sido muito utilizada noutras áreas do ramo segurador, nomeadamente, no contexto da estimação das provisões para sinistros.

Quando se depara com uma situação de escassez ou inexistência de dados, a aplicação dos métodos para a estimação das provisões para sinistros, descritos nos capítulos anteriores, pode mostrar-se inadequada, levando a resultados pouco fiáveis. Esta situação é muito comum nos casos de Resseguradoras com contratos não proporcionais e também, nas Seguradoras em ínicio de actividade ou sujeitas a grandes alterações legislativas ou de estrutura da carteira.

A publicação de [Neuhaus, 1992] descreve um método de credibilidade que ultrapassa essa limitação, ao aplicar um factor de credibilidade aos montantes das indemnizações estimadas pelo métodos CL e BF. Este método atribui muita confiança ao método CL se o factor de credibilidade for grande, caso contrário, considera que as estimativas do método BF são mais fiáveis do que as estimativas do método CL. Segundo [Neuhaus, 2008], [Mack, 2000] baptizou o método de "Método de Benktander" por ter sido, inicialmente, desenvolvido por Gunnar Benktander, em meados dos anos 70.

3.2 Método de Benktander

No que se segue utiliza-se a formulação apresentada em [Neuhaus, 1992] e também utilizada em [Neuhaus, 2008], nas quais é apresenta uma versão do método de Benktander aplicando os pressupostos de modelo de Bülhmann-Straub aos montantes incrementais.

Considere-se que, as variáveis aleatórias $(\Theta_i)_{0\leq i\leq n}$ representam os parâmetros de risco associados aos anos de ocorrência i, respectivamente. Tendo em conta a teoria subjacente ao modelo Bülhmann-Straub, os pressupostos considerados ([Neuhaus, 1992]) são:

1. $\Theta_0, \ldots, \Theta_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas, com função de distribuição U;

2. Dados Θ_i, as variáveis aleatórias $(X_{i,j})_{0 \leq j \leq n}$ são mutuamente independentes com:

$$\begin{aligned} E[X_{i,j}|\Theta_i] &= p_i \pi_j b(\Theta_i) \\ Var[X_{i,j}|\Theta_i] &= p_i \pi_j \nu(\Theta_i), \ \ 0 \leq i \leq n, \ \ 0 \leq j \leq n \end{aligned} \tag{3.2}$$

   Os paramêtros p_i e π_j são os mesmos paramêtros utilizados na formulação do método BF.

3. Os anos de ocorrência são independentes entre si.

A hipótese subjacente é que condicionalmente a Θ_i, as variáveis aleatórias $(X_{i,j})_{0 \leq j \leq n}$ seguem uma distribuição de Poisson generalizada.

Assim, as estimativas para os montantes incrementais são definidas por:

$$\widetilde{X}_{i,j} = p_i \cdot \left\{ z_i \cdot \frac{C_{i,n-i}}{p_i \cdot \tau_i} + (1 - z_i) \cdot \beta \right\} \cdot \pi_j, \ \ i + j > n \tag{3.3}$$

com:

$$C_{i,n-i} = \sum_{j=0}^{n-i} X_{i,j}, \ \ 0 \leq i \leq n \tag{3.4}$$

e

$$\tau_i = \sum_{j=0}^{n-i} \pi_j, \ \ 0 \leq i \leq n. \tag{3.5}$$

Os paramêtros z_i, com $i = \{1, \ldots, n\}$ são os factores de credibilidade associados aos n anos de ocorrência e os seus estimadores são obtidos pelo valores que minimizam $E\left[(X_{i,j} - \hat{X}_{i,j})^2\right]$, sendo definidos por:

$$z_i = \frac{p_i \tau_j \lambda}{\phi + p_i \tau_j \lambda}, \ \ 0 \leq i \leq n \tag{3.6}$$

Com:

$$\beta = E[b(\Theta_i)] \tag{3.7}$$

$$\phi = E[\nu(\Theta_i)] \tag{3.8}$$

$$\lambda = Var[b(\Theta_i)] \tag{3.9}$$

As estimativas das provisões para sinistros, $\widehat{R}_i$, com $i = \{1, \ldots, n\}$, serão, então, a soma dos montantes incrementais obtidas pela equação (3.3), isto é, $\widehat{R}_i = \sum_{j=n+1-i}^{n} \widetilde{X}_{i,j}$.

Para obter as estimativas desejadas, é necessário determinar as estimativas de todos os paramêtros da equação (3.3).

O estimador de π_j, π_j^*, $j = \{1, \ldots, n\}$, é definido pela equação (2.7). Assim sendo, o estimador de τ_i, $i = \{1, \ldots, n\}$, é dado por $\tau_i^* = \sum_{j=0}^{n-i} \pi_j^*$. O estimador de β é dado pela equação (2.6).

Numa situação de escassez ou pouca qualidade dos dados, torna-se complicado determinar estimadores para os parâmetros λ e ϕ. Nestas condições, [Neuhaus, 1992] propôe que os parâmetros z_i, com $i = \{1, \ldots, n\}$, sejam aproximados aos parâmetros τ_i, ao observar que z_i são funções côncavas de τ_i. Assim, nestas condições, os estimadores considerados para os parâmetros z_i são os estimadores τ_i^*.

Substituindo os estimadores na equação (3.3) obtém-se:

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_{i,j} &= p_i \cdot \left\{ \tau_i^* \frac{C_{i,n-i}}{p_i \tau_i^*} + (1 - \tau_i^*) \cdot \theta^* \right\} \cdot \pi_j^* \\ &= p_i \cdot \left\{ \frac{C_{i,n-i}}{p_i} + (1 - \tau_i^*) \cdot \theta^* \right\} \cdot \pi_j^*, \quad i + j > n. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ao contrário do que acontece no método BF, o método de Benktander considera que as taxas de sinistralidade variam com os anos de ocorrência e são definidas por:

$$\frac{C_{i,n-i}}{p_i} + (1 - \tau_i^*) \cdot \theta^*, \quad , \quad 0 \leq i \leq n. \tag{3.11}$$

Capítulo 4

Método de Bootstrap

O método de Bootstrap é uma técnica de simulação, inicialmente proposta por Bradlen Efron , em 1979, segundo [Taylor, 2000], que se baseia na geração de amostras aleatórias com reposição.

A grande vantagem da utilização deste método é a estimação de erros de previsão e intervalos de confiança. Para além disso, o método de Bootstrap destaca-se pela sua generalidade de aplicações.

Este método não inviabiliza a utilização dos outros métodos podendo ser utilizado como um complemento na análise dos resultados obtidos.

Os métodos utilizados na geração das amostras de Bootstrap podem ser paramétricos ou não-paramétricos. A utilização dos métodos paramétricos exige um conhecimento prévio da distribuição de probabilidade dos dados com um ou mais parâmetros desconhecidos e, neste caso, a geração das amostras com reposição é feita com base nas estimativas desses parâmetros que, geralmente, são obtidas pelo método da máxima verosimilhança. A reamostragem feita através dos métodos não-paramétricos tem como pressupostos um conjunto de variavéis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas, com distribuição de probabilidade desconhecida.

Apesar da sua generalidade, a aplicação deste método pode mostrar-se inconveniente na presença de dados incompletos, dependentes e *outliers*, podendo tais factores enviesar os resultados finais.

No âmbito do cálculo das provisões para sinistros, o método de Bootstrap é utilizado para estimar os erros de previsão e os intervalos de confiança das estimativas para as provisões, calculadas, previamente, por um outro método de estimação.

Os métodos mais utilizados como método base para calcular as estimativas analíticas das provisões são o método de CL e o modelo de Poisson Sobre-dispersão. Neste trabalho, opta-se por utilizar como método base o modelo de Poisson Sobre-dispersão devido à sua facilidade de implementação e, também, porque os seus resultados são idênticos aos resultados obtidos pelo método CL determinístico.

A simulação de Bootstrap, no contexto da estimação das provisões, baseia-se nos resíduos dos montantes incrementais, sob a hipótese de que são variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas, desprezando a estrutura dos dados iniciais.

De seguida, apresentar-se-á, de uma forma resumida, o modelo base utilizado para determinar as estimativas analíticas das provisões, bem como a técnica de simulação Bootstrap na estimativa dos erros de previsão e dos intervalos de confiança.

4.1 Modelo de Poisson Sobre-dispersão na Estimativa das Provisões

Segundo [Andrade e Silva et al., 2003], o modelo de Poisson Sobre-dispersão assume que os montantes incrementais, $X_{i,j}$, são variáveis aleatórias independentes com as seguintes características:

- $X_{i,j} \sim \text{Poisson}(\mu_{i,j})$
- $E[X_{i,j}] = \mu_{i,j}, \quad 0 \leq i \leq n,\, 0 \leq j \leq n-i$
- $V[X_{i,j}] = \mu_{i,j}, \quad 0 \leq i \leq n,\, 0 \leq j \leq n-i$
- $\sum\limits_{i=0}^{n} X_{i,j} \geq 0, \quad 0 \leq j \leq n$
- $\eta_{i,j} = \log(\mu_{i,j}), \quad 0 \leq i \leq n,\, 0 \leq j \leq n-i$
- $\eta_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j\ , \quad 0 \leq i \leq n,\, 0 \leq j \leq n-i$
- $Var[X_{i,j}] = \phi \cdot V[\mu_{i,j}] = \phi \cdot \mu_{i,j}$
- $\phi > 1$, (no modelo de Poisson simples, o parâmetro ϕ é identicamente igual a 1).

onde α_i e β_j, com $i = \{1, \ldots, n\}$ e $j = \{1, \ldots, n\}$, são os factores que representam, respectivamente, os contributos das covariáveis ano de ocorrência e ano de desenvolvimento. Para evitar que haja uma sobre-parametrização, suponha-se que $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. Assim, o valor da provisão associada ao primeiro ano de ocorrência é 0 (zero). O parâmetro μ representa a média total do conjunto.

Os parâmetros α_i, β_j, μ e ϕ são parâmetros estimados pelo método da quasi-verosimilhança (ver [Denuit et al., 2008]) e, portanto, os montantes incrementais modelizados são dados por:

$$\widehat{\mu}_{i,j} = \exp(\widehat{\eta}_{i,j}) = \exp(\widehat{\mu} + \widehat{\alpha}_i + \widehat{\beta}_j),\ \ 1 \leq i \leq n,\ \ 1 \leq j \leq n+1-i. \qquad (4.1)$$

Nestas condições, tem-se que o estimador das provisões para sinistros associado a cada um dos anos de ocorrência i será

$$\widehat{R}_i = \sum_{j=n+1-i}^{n} \widehat{\mu}_{i,j}, \;\; 1 \leq i \leq n, \tag{4.2}$$

sendo o estimador das provisões totais dado por:

$$\widehat{R} = \sum_{i=0}^{n} \widehat{R}_i. \tag{4.3}$$

4.2 Simulação de Bootstrap

A abordagem desta técnica de simulação será apresentada directamente no âmbito do cálculo das provisões. Conforme já se referiu no início deste capítulo, a técnica de simulação Bootstrap consiste na geração de um número suficientemente grande de amostras, com reposição, de resíduos, dos montantes incrementais.

4.2.1 Procedimento

Para se proceder à simulação de Bootstrap é necessário definir quais os resíduos a serem considerados. Neste caso, como o modelo de cálculo das estimativas analíticas das provisões é o modelo de Poisson Sobre-dispersão, consideram-se os resíduos de Pearson definidos na forma:

$$e_{i,j} = \frac{x_{i,j} - \widehat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{\widehat{\mu}_{i,j}}}, \;\; 0 \leq i \leq n \;\; , \;\; 0 \leq j \leq n-i \tag{4.4}$$

onde $e_{i,j}$, representa um conjunto de variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuidas, ou seja, para i fixo, os resíduos são independentes em j e para j fixo os resíduos são independentes em i; $x_{i,j}$ são as observações de $X_{i,j}$ e $\mu_{i,j}$ é a média de $X_{i,j}$.

De seguida, constrói-se um conjunto, t, de amostras de resíduos com reposição, $e_{i,j}^{\star(1)}, \ldots, e_{i,j}^{\star(t)}$, como base em $e_{i,j}$.

Do conjunto de resíduos obtidos pela reamostragem, constrói-se um novo conjunto de dados incrementais, $X_{i,j}^{\star(1)}, \ldots, X_{i,j}^{\star(t)}$, designados de pseudo-dados sendo, cada um destes, definidos pela forma:

$$x_{i,j}^{\star(b)} = e_{i,j}^{\star(b)} \cdot \sqrt{\widehat{\mu}_{i,j}} + \widehat{\mu}_{i,j}, \;\; 1 \leq b \leq t\,, \;\; 0 \leq i \leq n \;\; , \;\; 0 \leq j \leq n-i. \tag{4.5}$$

Para cada uma das variáveis $X_{i,j}^{\star(b)}$, são determinados os estimadores das provisões para cada ano de ocorrência, $\widehat{R}_i^{\star(b)}$ e da provisão total, $\widehat{R}^{\star(b)}$, obtendo-se, assim, para cada um destes estimadores[1], uma amostra aleatória, de dimensão t. Para estas amostras, pode-se determinar as estatísticas de interesse como a média e o desvio padrão, realizar um teste de ajustamento a uma distribuição de probabilidade conhecida e, ainda, estimar os intervalos de confiança.

As respectivas médias dos estimadores, $\overline{\widehat{R}}_i^{\star(b)}$ e $\overline{\widehat{R}}^{\star(b)}$, serão dadas por:

$$\begin{aligned}
\overline{\widehat{R}}_i^{\star(b)} &= \frac{1}{t}\sum_{b=1}^{t}\widehat{R}_i^{\star(b)}, \quad 0 \leq i \leq n \\
\overline{\widehat{R}}^{\star(b)} &= \frac{1}{t}\sum_{b=1}^{t}\widehat{R}^{\star(b)}. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

4.2.2 Medidas de Variabilidade

A determinação das medidas de variabilidade é importante na análise da adequabilidade dos estimadores, pois indicam a variação entre os valores observados das provisões e as suas estimativas. Nesta secção apresentam-se as duas medidas de variabilidade mais utilizadas na análise estatística dos estimadores obtidos pelo método de Bootstrap, os erros de previsão e os intervalos de confiança.

Erros de previsão

Os erros de previsão, ou desvios padrão das estimativas de Bootstrap, $\widehat{\sigma}_b$ e $\widehat{\sigma}$, são definidos por:

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}_b\left(\widehat{R}_i^{\star(b)}\right) &= \frac{1}{t-1}\sqrt{\sum_{b=1}^{t}\left(\widehat{R}_i^{\star(b)} - \overline{\widehat{R}}_i^{\star(b)}\right)^2}, \quad 0 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq b \leq t \\
\widehat{\sigma}\left(\widehat{R}^{\star(b)}\right) &= \frac{1}{t-1}\sqrt{\sum_{b=1}^{t}\left(\widehat{R}^{\star(b)} - \overline{\widehat{R}}^{\star(b)}\right)^2}. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

A construção das medidas de variabilidade dos estimadores simulados dependem da sua média, não sendo possível comparar essas medidas com as obtidas de forma analítica. No entanto, [England and Verrall, 1999] sugerem a aplicação de uma correcção ao desvio padrão desses estimadores. A correcção consiste em multiplicar o

[1] O procedimento de cálculo dos estimadores adoptado é o mesmo do modelo utilizado na estimação analítica das provisões.

factor $\dfrac{n}{n-p}$, com p igual ao número de parâmetros estimados, ao desvio padrão de Bootstrap. Esta correcção pode ser desprezada quando n for suficientemente grande.

Para obter o erro de previsão, é necessário adicionar a medida de variabilidade do processo, obtida através do produto das estimativas analíticas pelo parâmetro de escala, ϕ, definido pela seguinte equação:

$$\phi = \frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=n-i}^{n} e_{i,j}^2. \tag{4.8}$$

Assim, os valores dos erros de previsão associados aos estimadores de Bootstrap são definidos por:

$$\begin{aligned} \widehat{EP}_b(\widehat{R}_i^{\star(b)}) &= \sqrt{\phi \cdot R_i + \frac{n}{n-p} \cdot \widehat{\sigma}_b\left(\widehat{R}_i^{\star(b)}\right)}, \;\; 0 \le i \le n \text{ e }, \; 1 \le b \le t \\ \widehat{EP}(\widehat{R}^{\star(b)}) &= \sqrt{\phi \cdot R + \frac{n}{n-p} \cdot \widehat{\sigma}\left(\widehat{R}^{\star(b)}\right)}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Intervalos de Confiança

A simulação de Bootstrap apresentada baseia-se em pressupostos não paramétricos, logo, não obrigando a propor uma distribuição de probabilidade inerente aos dados e estimadores obtidos. No entanto, tratando-se de amostras aleatórias de dimensão muito elevada e tendo em conta o resultado do Teorema Limite Central[2], pode-se aproximar a distribuição da média, recorrendo a uma distribuição Normal Assintótica. Nestas condições, com base nas equações (4.2), (4.3) e (4.9), os intervalos de confiança, IC_i, para as provisões associadas a cada ano de ocorrência, e IC, para a provisão total são definidos, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} IC_i &= \left]\widehat{R}_i \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \widehat{EP}_b(\widehat{R}_i^{\star(b)})\right[\;, \;\; 0 \le i \le n \\ IC &= \left]\widehat{R} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \widehat{E}P(\widehat{R}^{\star(b)})\right[. \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ é o quantil de probabilidade da distribuição Normal reduzida.

[2]A distribuição assimptótica da média de n variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuidas, é $N(\mu, \sigma^2)$.

4.2.3 Medidas de Risco: VaR e $TailVaR$

De acordo com as necessidades do projecto de Solvência II, devem, ainda, ser estimadas as medidas de risco para as provisões obtidas, o *Value-at-Risk* (VaR) e o *Tail Value-at-Risk* ($TailVaR$), que são estimativas de probabilidade máxima de insolvência, logo associados a valores extremos, para horizontes temporais definidos.

A medida de risco VaR permite obter uma estimativa da pior perda, num determinado período, para um determinado nível de confiança, α, e é definida por:

$$VaR_\alpha = inf\{x \; \epsilon \; \mathbb{R} : \mathbb{P}[R > x] \leq \; 1 - \alpha\} \tag{4.11}$$

onde R representa as estimativas das provisões obtidas.

Por outras palavras, o VaR é o quantil (q_α) da distribuição das estimativas das provisões.

O $TailVaR$ é uma medida de risco que reflecte a perda média dos valores que excedem o quantil VaR, definida por:

$$TailVaR_\alpha = \mathbb{E}[R|R \geq VaR_\alpha] = \mathbb{E}[R - VaR_\alpha|R > VaR_\alpha] + VaR_\alpha. \tag{4.12}$$

Capítulo 5

Apresentação e Análise dos Resultados Práticos

Neste capítulo, procede-se à apresentação dos resultados práticos da temática em estudo considerando os dados relativos aos sinistros pagos entre os anos de 2000 e 2009, do ramo automóvel, do relatório [ISP, 2009]. A unidade monetária usada é o milhar de euros.

A matriz dos dados incrementais utilizada para a aplicação dos métodos descritos, no presente trabalho, é a matriz apresentada na Tabela 5.1.

O presente capítulo encontra-se dividido em duas secções. Na primeira secção determinam-se as estimativas do método CL baseando-se na informação exterior fornecida sobre os montantes provisionados. Na segunda secção, incorpora-se a secção 2.3 nos modelos de estimação de provisões CL, BF e, por conseguinte, no Benktander e, também, no Bootstrap.

5.1 O método CL

No caso prático em análise, existem ainda sinistros pendentes de encerramento, ocorridos no ano 2000, com uma provisão estimada, pelas Seguradoras, no montante de 45.622 mil euros. Por definição, esta informação deve ser considerada na aplicação do método CL sendo acrescentada uma nova coluna, o *ultimate*, na matriz apresentada na Tabela 5.1. Assim, na Tabela 5.2, apresenta-se a matriz dos montantes acumulados considerada na aplicação deste método e os respectivos coeficientes de desenvolvimento.

Na Tabela 5.3, apresenta-se a matriz dos montantes acumulados das indemnizações estimadas obtidas pela equação (2.1). Apresentam-se, ainda, na Tabela 5.4, a matriz dos montantes incrementais bem como as estimativas das provisões para sinistros obtidas através da aplicação do método CL.

A provisão total estimada pelo método CL no montante de 2.019.336 mil euros é inferior à estimativa provisionada pelas Seguradoras no montante de 2.054.233 mil euros, o que indicia suficiência do montante provisionado.

Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2000	467.722	297.196	85.402	55.268	42.112	31.693	25.614	19.143	14.201	10.122
2001	691.643	318.964	85.009	64.694	36.029	29.277	30.177	20.083	15.385	
2002	760.541	305.469	85.333	57.961	38.851	31.308	26.448	18.125		
2003	704.801	315.213	80.796	56.702	37.426	27.797	26.207			
2004	683.225	283.721	75.755	53.100	32.679	28.456				
2005	643.849	287.549	78.213	52.288	33.341					
2006	624.765	294.989	73.879	46.046						
2007	644.699	292.517	66.586							
2008	685.274	289.494								
2009	710.337									

Tabela 5.1: Montantes incrementais

Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	∞
2000	467.722	764.918	850.320	905.588	947.700	979.393	1.005.007	1.024.150	1.038.351	1.048.473	1.094.095
2001	691.643	1.010.607	1.095.616	1.160.310	1.196.339	1.225.616	1.255.793	1.275.876	1.291.261		
2002	760.541	1.066.010	1.151.343	1.209.304	1.248.155	1.279.463	1.305.911	1.324.036			
2003	704.801	1.020.014	1.100.810	1.157.512	1.194.938	1.222.735	1.248.942				
2004	683.225	966.946	1.042.701	1.095.801	1.128.480	1.156.936					
2005	643.849	931.398	1.009.611	1.061.899	1.095.240						
2006	624.765	919.754	993.633	1.039.679							
2007	644.699	937.216	1.003.802								
2008	685.274	974.768									
2009	710.337										

Coeficientes de Desenvolvimento	1,0000	1,4546	1,0828	1,0533	1,0334	1,0260	1,0230	1,0161	1,0129	1,0097	1,0435

Tabela 5.2: Montantes acumulados e coeficientes de desenvolvimento

Ano de	Ano de Desenvolvimento										
Ocorrência	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	∞
2000											1.094.095
2001										1.303.848	1.360.582
2002									1.341.068	1.354.141	1.413.063
2003								1.269.024	1.285.348	1.297.878	1.354.352
2004							1.183.590	1.202.622	1.218.092	1.229.966	1.283.485
2005						1.123.702	1.149.590	1.168.075	1.183.100	1.194.633	1.246.615
2006					1.074.454	1.102.376	1.127.773	1.145.907	1.160.647	1.171.961	1.222.956
2007				1.057.298	1.092.663	1.121.058	1.146.885	1.165.326	1.180.316	1.191.822	1.243.682
2008			1.055.517	1.111.769	1.148.956	1.178.814	1.205.972	1.225.363	1.241.125	1.253.224	1.307.755
2009		1.033.257	1.118.851	1.178.478	1.217.896	1.249.545	1.278.332	1.298.887	1.315.595	1.328.420	1.386.223

Tabela 5.3: Montantes acumulados estimados

Ano de	Ano de Desenvolvimento											Provisões
Ocorrência	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	∞	Estimadas
2000											45.622	45.622
2001										12.587	56.734	69.322
2002									17.032	13.073	58.922	89.027
2003								20.082	16.324	12.530	56.474	105.410
2004							26.654	19.032	15.470	11.874	53.519	126.548
2005						28.462	25.888	18.485	15.025	11.533	51.982	151.375
2006					34.775	27.922	25.397	18.134	14.740	11.314	50.995	183.278
2007				53.496	35.365	28.395	25.827	18.441	14.990	11.506	51.860	239.880
2008			80.749	56.252	37.187	29.858	27.158	19.391	15.762	12.099	54.531	332.987
2009		322.920	85.594	59.627	39.418	31.649	28.787	20.555	16.708	12.825	57.803	675.887
Total												2.019.336

Tabela 5.4: Montantes incrementais e respectivas provisões para sinistros

5.2 Incorporação do factor cauda na estimativa das provisões para sinistros

No caso de não existir informação relativa aos montantes provisionados para os sinistros pendentes de encerramento, no final do exercício, ou, quando existir, não se confia nos montantes apresentados, recorre-se ao modelo apresentado na secção 2.3 para melhorar as estimativas obtidas pelos métodos apresentados.

5.2.1 Aplicação do método CL

Ignorando a informação fornecida pelas Seguradoras em relação ao montante provisionado para os sinistros pendentes, apresenta-se uma nova aplicação do método CL baseando no exposto na secção 2.3 e nos dados da Tabela 5.1.

Considera-se como o ano de partida para a projecção, o ano de desenvolvimento 10. Essa escolha prende-se com o facto dos montantes incrementais de cada ano de desenvolvimento não apresentarem um comportamento diferenciado entre os anos de ocorrência.

Considerando vários cenários para o parâmetro δ e para o número de anos de desenvolvimento na evolução dos coeficientes de desenvolvimento, conclui-se que $\delta = 0,85$ é uma boa escolha, se se considerar que os sinistros, ocorridos no ano de 2000, estarão quase regularizados até o final do vigésimo ano de desenvolvimento, conforme se pode observar na Figura 5.1.

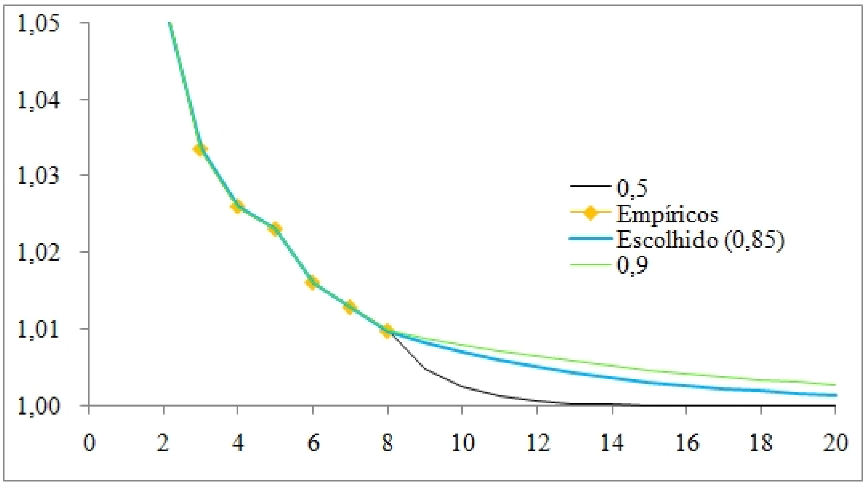

Figura 5.1: Projecção dos coeficientes de desenvolvimento - Método CL

Apresentam-se, na Tabela 5.6, os coeficientes de desenvolvimento obtidos pelo método CL até o nono ano de desenvolvimento e os coeficientes projectados, para o vigésimo ano de desenvolvimento definidos pela equação (2.11).

Tendo a cauda projectada, aplica-se então a teoria subjacente ao método CL para obter as suas estimativas. Apresentam-se na Tabela 5.7 os montantes incrementais estimados e as respectivas estimativas das provisões para sinistros, bem como o montante total a provisionar. A coluna *ultimate* corresponde a soma de todos os montantes incrementais estimados para os anos de desenvolvimento superiores a 9.

Na Tabela 5.5 são apresentadas as estimativas obtidas na secção 5.1, as estimativas obtida pela projecção dos coeficientes de desenvolvimento e os montantes provisionados pelas Seguradoras, pela mesma ordem de referência, discriminadas por ano de ocorrência.

Nota-se que as estimativas recalculadas estão mais próximas do montante provisionado, do que as estimativas obtidas pela aplicação do método CL aos dados considerando como *ultimate* os 45.622 mil euros provisionados para os sinistros ocorridos no ano de 2000. Este resultado, acaba por confirmar a escolha do δ e do número de anos desenvolvimento considerados na estimação do factor cauda.

Ano de Ocorrência	Provisões CL Estimadas	Provisões CL Projectadas	Provisionado
2000	45.622	49.220	45.622
2001	69.322	73.796	61.840
2002	89.027	93.674	83.186
2003	105.410	109.864	113.127
2004	126.548	130.769	163.131
2005	151.375	155.475	177.535
2006	183.278	187.299	215.350
2007	239.880	243.970	276.424
2008	332.987	337.287	330.049
2009	675.887	680.446	587.969
Total	2.019.336	2.061.799	2.054.233

Tabela 5.5: Comparação das estimativas do método CL e do montante provisionado

Ano de Desenvolvimento									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0000	1,4546	1,0828	1,0533	1,0334	1,0260	1,0230	1,0161	1,0129	1,0097

Ano de Desenvolvimento										
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1,0083	**1,007**	**1,006**	**1,0051**	**1,0043**	**1,0037**	**1,0031**	**1,0027**	**1,0023**	**1,0019**	**1,0016**

Tabela 5.6: Coeficientes de desenvolvimento projectados - Método CL

Ano de	Ano de Desenvolvimento											Provisões
Ocorrência	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	∞	Estimadas
2000											49.220	49.220
2001										12.587	61.208	73.796
2002									17.032	13.073	63.569	93.674
2003								20.082	16.324	12.530	60.928	109.864
2004							26.654	19.032	15.470	11.874	57.740	130.769
2005						28.462	25.888	18.485	15.025	11.533	56.081	155.475
2006					34.775	27.922	25.397	18.134	14.740	11.314	55.017	187.299
2007				53.496	35.365	28.395	25.827	18.441	14.990	11.506	55.949	243.970
2008			80.749	56.252	37.187	29.858	27.158	19.391	15.762	12.099	58.832	337.287
2009		322.920	85.594	59.627	39.418	31.649	28.787	20.555	16.708	12.825	62.362	680.446
Total												2.061.799

Tabela 5.7: Montantes incrementais projectados - Método CL

5.2.2 Aplicação do método BF

Com base no exposto no último parágrafo da secção 2.3 e no comportamento dos quocientes $\frac{S_j}{p_j}$, para $j = 4, \ldots, 9$, determinou-se os coeficientes de ajustamento da função de regressão obtendo, assim, $y = -0,007 \ln(j) + 0,0208$. Para determinar o factor de cauda a utilizar na aplicação do método BF, foi realizada uma projecção desses quocientes até o vigésimo ano de desenvolvimento, usando a função de regressão estimada, y, conforme se pode observar no gráfico da Figura 5.2.

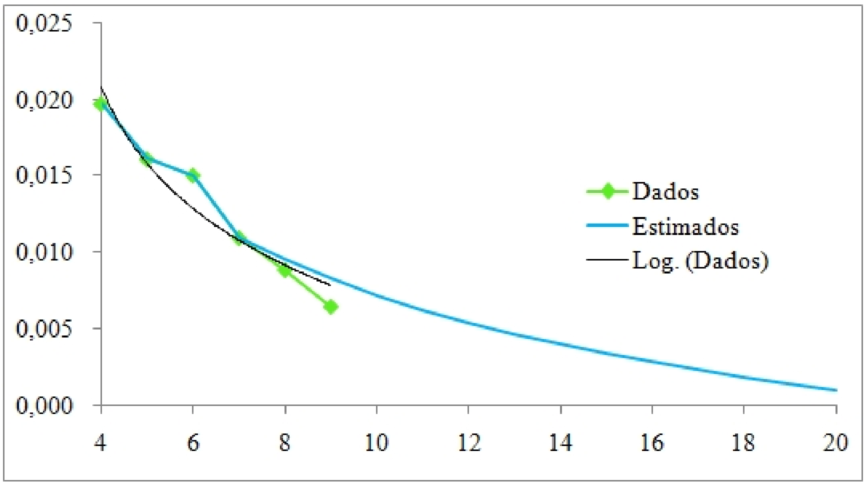

Figura 5.2: Projecção dos coeficientes de desenvolvimento - Método BF

Baseando-se nos prémios da Tabela 5.8 , nos dados da Tabela 5.1 e na equação (2.6), obtém-se uma taxa de sinistralidade $\theta^* = 0{,}7102$.

Para finalizar os resultados obtidos pela aplicação deste método, apresentam-se na Tabela 5.10, as estimativas dos montantes incrementais e das provisões para sinistros associadas aos anos de ocorrência.

5.2.3 A Teoria da Credibilidade: aplicação do método de Benktander

As estimativas do método Benktander são baseadas nas estimativas apresentadas nas secções 5.2.1 e 5.2.2, conforme foi referido no capítulo 3. Assim, na Tabela 5.12, podem consultar-se os montantes incrementais estimados pelo método de Benktander bem como as provisões para os sinistros relativos aos anos de ocorrência 2000 a 2009, sendo as taxas de sinistralidade, obtidas pela aplicação do método, apresentadas na Tabela 5.11.

Ano de ocorrência									
2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
1.613.657	1.815.066	1.898.296	1.923.337	1.951.300	2.020.042	1.971.777	1.902.699	1.769.083	1.563.259

Tabela 5.8: Prémios emitidos brutos

Ano de Desenvolvimento									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,506	0,225	0,059	0,041	0,028	0,023	0,021	0,015	0,013	0,012

Ano de Desenvolvimento										
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,0101	**0,0088**	**0,0076**	**0,0066**	**0,0057**	**0,0048**	**0,0040**	**0,0033**	**0,0026**	**0,0020**	**0,0014**

Tabela 5.9: Coeficientes de desenvolvimento projectados- Método BF

Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento											Provisões Estimadas
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	∞	
2000											65.061	65.061
2001										14.988	73.182	88.170
2002									18.098	15.676	76.538	110.312
2003								21.071	18.337	15.882	77.547	132.837
2004							29.363	21.377	18.604	16.113	78.675	164.131
2005						32.518	30.397	22.130	19.259	16.681	81.447	202.431
2006					38.884	31.741	29.671	21.601	18.799	16.282	79.501	236.479
2007				56.066	37.522	30.629	28.631	20.844	18.140	15.712	76.715	284.261
2008			74.417	52.129	34.887	28.478	26.621	19.381	16.866	14.609	71.328	338.716
2009		249.632	65.759	46.064	30.828	25.165	23.523	17.126	14.904	12.909	63.029	548.940
Total												2.171.339

Tabela 5.10: Montantes incrementais projectados - Método BF

Ano de ocorrência									
2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
0,6803	0,7521	0,7468	0,7065	0,6599	0,6192	0,6223	0,6558	0,7417	0,8897

Tabela 5.11: Taxas de sinstralidade - Método Benktander

Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento											Provisões Estimadas
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	∞	
2000											50.280	50.280
2001										14.988	60.332	75.321
2002									18.098	12.948	62.960	94.006
2003								21.071	16.337	12.540	60.977	110.925
2004							29.363	19.212	15.616	11.987	58.287	134.464
2005						32.518	26.275	18.761	15.250	11.705	56.919	161.428
2006					35.173	28.241	25.687	18.341	14.909	11.443	55.646	189.439
2007				53.789	35.559	28.551	25.969	18.542	15.072	11.569	56.256	245.307
2008			80.564	56.123	37.101	29.789	27.096	19.347	15.726	12.071	58.697	336.514
2009		319.999	84.820	59.088	39.062	31.363	28.527	20.369	16.557	12.709	61.798	674.291
Total												2.071.975

Tabela 5.12: Montantes incrementais projectados - Método de Benktander

5.2.4 O método de Bootstrap

O método de Bootstrap não incorpora a cauda nos dados devido a incerteza associada aos valores estimados para além do exercício, assim, as suas estimativas são recalculadas, de acordo com o exposto na secção 2.3, de forma a obter uma melhor *performance* dos resultados finais.

Para a aplicação do método de Bootstrap é necessário determinar os montantes modelizados incrementais. Esses valores são estimados pela equação (4.1) e estão apresentados na Tabela 5.15.

A aplicação prática do método de Bootstrap basea-se nos resíduos apresentados na Tabela 5.16 obtidos pela equação (4.4), sob a hipótese de que são independentes e identicamente distribuídos. Neste sentido, apresenta-se nas figuras 5.3 e 5.4, a relação dos resíduos com os anos de ocorrência e os anos de desenvolvimento, respectivamente, verificando que os mesmos apresentam um padrão satisfatório.

Conforme se pode observar, na matriz dos resíduos da Tabela 5.16 existem dois valores nulos. No processo da reamostragem esses valores não são considerados.

Para a aplicação da técnica de simulação Bootstrap, foram feitas 50.000 amostras de resíduos com reposição, obtendo, assim, a mesma quantidade de matriz de pseudo-dados.

Na Tabela 5.17, apresenta-se, como exemplo de ilustração, uma das matrizes de resíduos geradas pelo método sendo a correspondente matriz de pseudo-dados apresentada na Tabela 5.18.

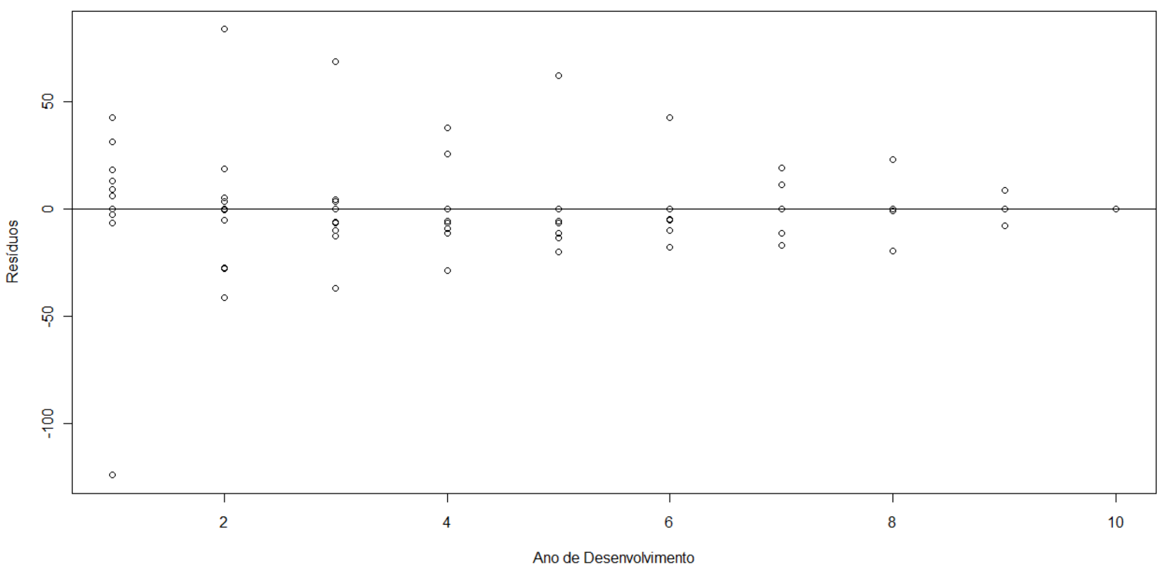

Figura 5.3: Resíduos vs Ano de Desenvolvimento

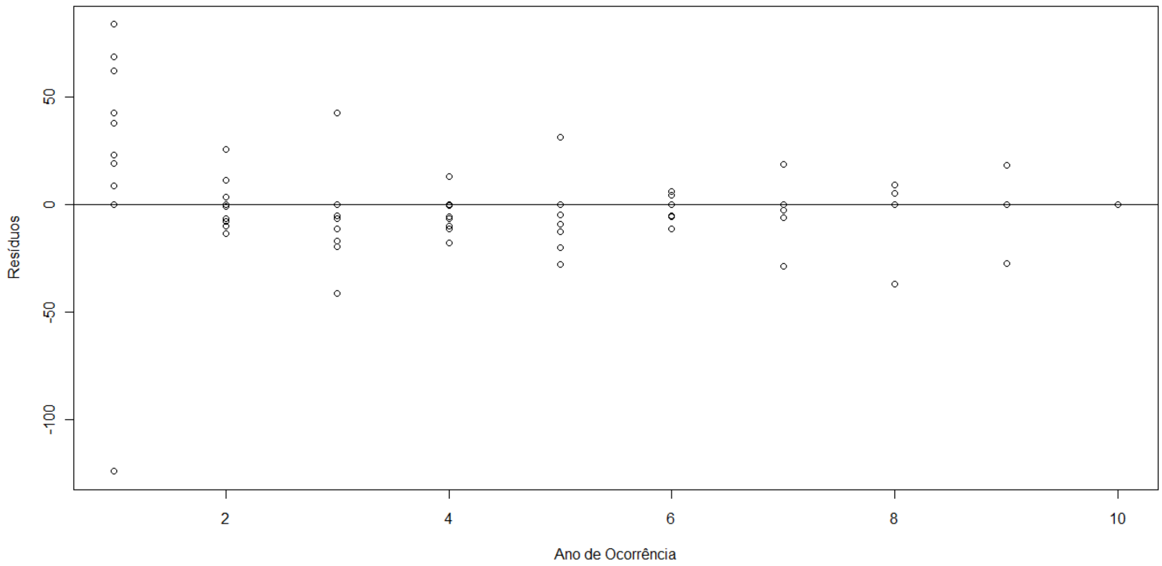

Figura 5.4: Resíduos vs Ano de Ocorrência

Para cada uma das matrizes de pseudo-dados, são determinados os estimadores das provisões para sinistros usando a metodologia adoptada para cálculo das estimativas analíticas.

Na Tabela 5.13, apresenta-se o resumo dos resultados obtidos pela aplicação do método de Bootstrap a amostras de dimensão 50.000. A primeira coluna corresponde às estimativas analíticas obtidas pelo modelo de Poisson Sobre-dispersão. A coluna "Provisão Simulada-Exemplo" corresponde às estimativas associadas aos pseudo-dados da Tabela 5.18. As médias e os desvios padrão dos estimadores definidos pelas fórmulas (4.6) e (4.7) são apresentados, respectivamente, na quarta e quinta colunas. Os valores da coluna "Variabilidade" são os produtos dos desvios padrão pelo factor $\left(\dfrac{n}{n-p}\right)$. Estes valores podem ser desprezados para n grande. Os erros de previsão de Bootstrap definidos pela fórmula (4.9) estão apresentados na sexta coluna.

As dimensões das amostras são, por construção, muito grandes. Assim, com base no resultado do Teorema Limite Central, as estimativas obtidas pelo método de Bootstrap são assimptoticamente Normais. Nestas condições, podem-se determinar os intervalos de confiança para os estimadores do método de Bootstrap, com $\alpha = 5\%$, sendo as estimativas dos respectivos limites, inferiores e superiores, apresentadas nas últimas colunas da Tabela 5.13.

A Figura 5.5 corresponde ao ajustamento das estimativas da provisão total a uma distribuição teórica conhecida. A curva tracejada representa a densidade de probabilidade de uma distribuição Normal cujos parâmetros são a média e o desvio padrão das estimativas e a curva contínua representa a densidade de probabilidade empírica dessas estimativas. Conforme se pode observar, o gráfico sugere uma tendência Normal para as estimativas da provisão total.

Ano de Ocorrência	Provisões Analíticas	Provisões Simuladas - Exemplo	Média	Desvio Padrão	Erro Bootstrap	Limite Inferior	Limite Superior
2000	49.220	46.204	47.465	1.370	8.253	33.044	65.396
2001	73.796	73.838	71.721	4.121	10.928	52.378	95.214
2002	93.674	101.047	91.562	5.456	12.714	68.755	118.593
2003	109.864	113.469	107.912	6.094	13.867	82.685	137.043
2004	130.769	130.348	128.940	6.755	15.186	101.005	160.533
2005	155.475	159.972	153.806	7.464	16.613	122.914	188.036
2006	187.299	192.615	185.643	8.486	18.397	151.242	223.356
2007	243.970	248.518	242.468	10.199	21.292	202.238	285.702
2008	337.287	331.695	335.755	13.238	25.791	286.738	387.836
2009	680.446	670.960	679.000	27.155	42.557	597.036	763.856
Total	2.061.799	2.068.666	2.044.272	58.490	83.295	1.898.545	2.225.055

Tabela 5.13: Resultados finais da simulação Bootstrap

Na Tabela 5.14, apresentam-se as estimativas dos quantis a 99% e 95% das provisões para o VaR e $TailVaR$, respectivamente.

α	VaR	$TailVaR$
1%	2.238.045	2.254.659
5%	2.181.280	2.204.141

Tabela 5.14: Medidas de risco

Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2000	560.642	254.869	67.556	47.062	31.111	24.980	22.721	16.223	13.187	10.122
2001	697.197	316.947	84.011	58.524	38.689	31.064	28.255	20.175	16.399	
2002	724.090	329.172	87.251	60.782	40.181	32.262	29.345	20.953		
2003	694.005	315.496	83.626	58.256	38.512	30.922	28.126			
2004	657.690	298.987	79.250	55.208	36.497	29.304				
2005	638.798	290.398	76.974	53.622	35.448					
2006	626.675	284.887	75.513	52.605						
2007	637.295	289.715	76.793							
2008	670.127	304.641								
2009	710.337									

Tabela 5.15: Montantes incrementais ajustados - Modelo de Poisson Sobre-dispersão

Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2000	-124,10	83,84	68,66	37,83	62,37	42,47	19,19	22,93	8,83	0,00
2001	-6,65	3,58	3,44	25,50	-13,52	-10,14	11,43	-0,65	-7,92	
2002	42,84	-41,31	-6,49	-11,44	-6,64	-5,31	-16,91	-19,54		
2003	12,96	-0,50	-9,79	-6,44	-5,53	-17,77	-11,44			
2004	31,49	-27,92	-12,42	-8,97	-19,99	-4,95				
2005	6,32	-5,29	4,47	-5,76	-11,19					
2006	-2,41	18,93	-5,95	-28,60						
2007	9,27	5,21	-36,83							
2008	18,50	-27,44								
2009	0,00									

Tabela 5.16: Resíduos de Pearson

Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2000	-8,97	-41,31	19,19	-28,60	3,58	-5,31	-36,83	22,92	18,93	22,92
2001	-5,29	-6,44	0,00	-27,44	-19,98	11,43	-27,44	8,83	-5,95	
2002	8,83	83,84	42,48	-41,31	-5,95	25,50	31,49	-6,49		
2003	-9,79	-5,31	-6,49	8,83	-12,42	83,84	-9,79			
2004	0,00	-27,44	-19,98	9,28	-4,95	9,28				
2005	6,32	-13,52	-27,44	9,28	-28,60					
2006	-2,41	19,19	4,47	-11,44						
2007	18,50	3,44	-6,44							
2008	4,47	-41,31								
2009	-9,79									

Tabela 5.17: Resíduos com reposição - Exemplo

Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2000	553.925	234.012	72.545	40.858	31.743	24.140	17.169	19.143	15.360	12.428
2001	692.783	313.321	84.011	51.886	34.758	33.079	23.642	21.429	15.638	
2002	731.603	377.275	99.798	50.596	38.989	36.843	34.738	20.013		
2003	685.852	312.512	81.748	60.388	36.075	45.665	26.484			
2004	657.690	283.981	73.625	57.387	35.551	30.891				
2005	643.849	283.111	69.360	55.770	30.064					
2006	624.765	295.132	76.740	49.981						
2007	652.066	291.569	75.008							
2008	673.784	281.838								
2009	702.089									

Tabela 5.18: Pseudo-dados - Exemplo

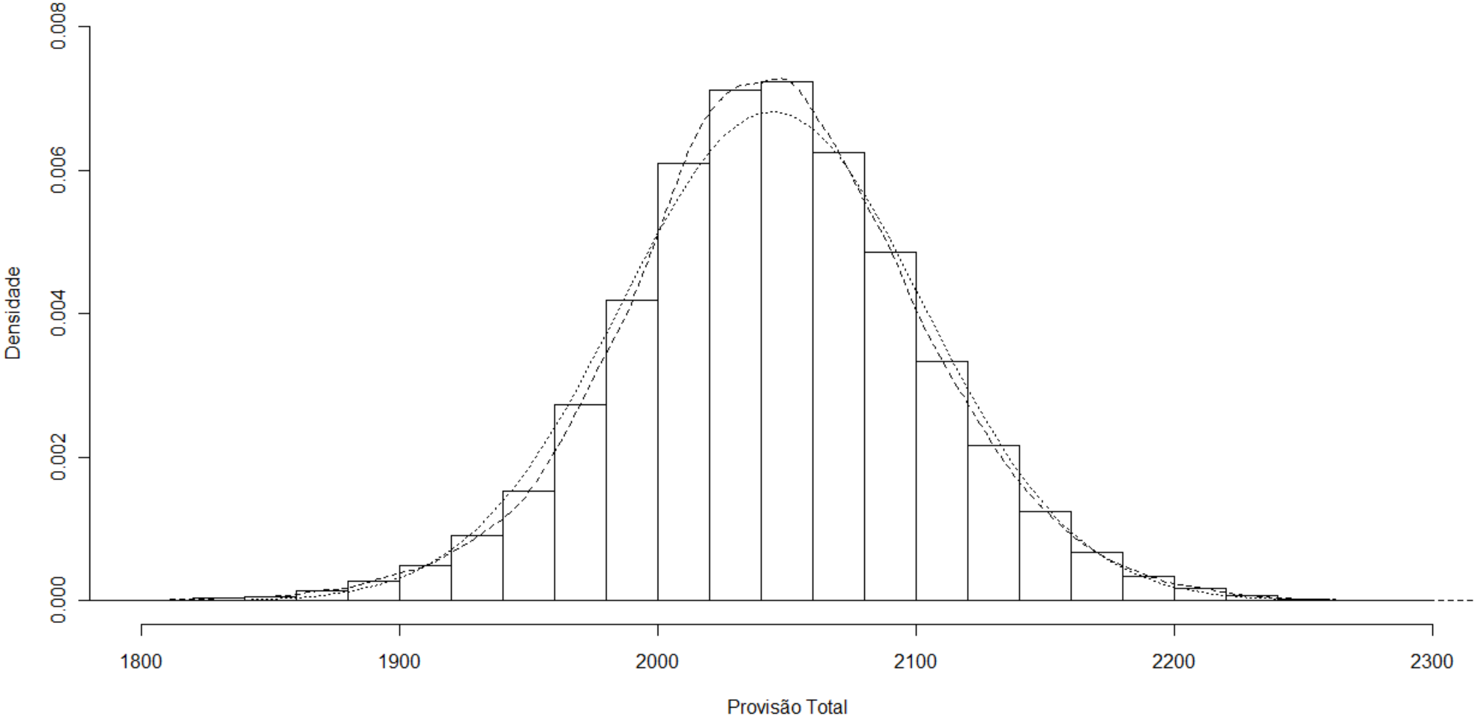

Figura 5.5: Distribuição ajustada das estimativas de Bootstrap

5.2.5 Comparação das estimativas finais

Para efeitos de comparação das estimativas obtidas pela aplicação dos vários métodos explanados ao longo deste trabalho, apresenta-se na Tabela 5.19, o resumo dos resultados obtidos.

Numa análise global, verifica-se que as estimativas obtidas pela aplicação dos métodos CL, BF e Benktander, são superiores às estimativas provisionadas pelas Seguradoras para o final do exercício de 2009, no montante de 2.054.233 mil euros. Esta situação indica que o valor provisionado pode não ser suficiente para cobrir as despesas com os sinistros. No entanto, baseando-se em vários cenários da simulação de Bootstrap, observou-se que, em média, as estimativas provisionadas pelas Seguradoras são suficientes, o que mostra a eficácia do método neste caso prático.

Quando se compara as estimativas dos métodos CL e BF, verifica-se que o método CL apresenta valores mais baixos, para as provisões, do que o método BF. Esta situação deve-se ao facto de se estar a trabalhar com dados agregados de todas as Seguradoras de nacionais e, também, porque o volume de prémios considerado na aplicação do método BF têm vindo a diminuir desde o ano 2006.

No entanto, ambas as estimativas para a provisão total encontram-se entre o limite inferior e o limite superior, obtidos através da simulação de Bootstrap, conforme se pode observar na Tabela 5.19.

De acordo com os resultados da Tabela 5.14, verifica-se que as Seguradoras podem escolher guiar-se pelo valor do VAR ou do $TailVaR$, dando este último, uma maior garantia para cobrir os encargos. Trata-se de um valor bastante elevado e corresponde a perdas que ocorrem com pouca probabilidade.

Recorrendo ao VaR e $TailVaR$ para um nível de confiança de 1%, estima-se que com probabilidade superior a 99%, o montante provisionado não excederá os 2.238.045 mil euros e que, na eventualidade de exceder este limiar, improvável devido do seu valor elevado, o montante deverá situar-se nos 2.254.659 mil euros.

Ano de Ocorrência	Estimativas								
	Provisionadas	Método CL (*ultimate a priori*)	Método CL	Método BF	Método Benktander	Bootstrap			
						Média	Erro de Previsão	Limite Inferior 95%	Limite Superior 95%
2000	45.622	45.622	49.220	65.061	50.280	47.465	8.253	33.044	65.396
2001	61.840	69.322	73.796	88.170	75.321	71.721	10.928	52.378	95.214
2002	83.186	89.027	93.674	110.312	94.006	91.562	12.714	68.755	118.593
2003	113.127	105.410	109.864	132.837	110.925	107.912	13.867	82.685	137.043
2004	163.131	126.548	130.769	164.131	134.464	128.940	15.186	101.005	160.533
2005	177.535	151.375	155.475	202.431	161.428	153.806	16.613	122.914	188.036
2006	215.350	183.278	187.299	236.479	189.439	185.643	18.397	151.242	223.356
2007	276.424	239.880	243.970	284.261	245.307	242.468	21.292	202.238	285.702
2008	330.049	332.987	337.287	338.716	336.514	335.755	25.791	286.738	387.836
2009	587.969	675.887	680.446	548.940	674.291	679.000	42.557	597.036	763.856
Total	2.054.233	2.019.336	2.061.799	2.171.339	2.071.975	2.044.272	83.295	1.898.545	2.225.055

Tabela 5.19: Comparação das estimativas finais

Capítulo 6

Conclusão

O equilibrio actuarial de uma Seguradora que comercializa produtos não vida, é fortemente influenciado pela política de estimação das provisões técnicas, em particular das provisões para sinistros. Assim, por questões prudenciais, o recurso aos métodos estatísticos na estimação das provisões para sinistros, têm vindo a aumentar. A selecção do método de estimação basea-se na qualidade e quantidade dos dados, nas influências internas ou externas que possam distorcer os resultados, nomeadamente as alterações na legislação e na carteira de sinistros.

Das metodologias utilizadas na estimação das provisões para sinistros, observa-se que o método CL é muito influenciado pelos anos recentes sendo mais adequado para as carteiras de dados estáveis. O método BF é mais apropriado para os casos em que os dados são escassos. A sua aplicação requer o conhecimento prévio de informações exteriores aos dados. O método de credibilidade apresentado tem uma estrutura simples de implementar e funciona como uma média ponderada dos resultados obtidos pelos métodos CL e BF. A credibilidade é de fundamental importância em situações onde os dados não apresentem qualidade para aplicar os restantes métodos. Ficará, para trabalhos futuros, a aplicação do método num caso real de uma Seguradora com pouca informação, ponderando-os com os dados nacionais disponibilizados pelo ISP. O método de Bootstrap é uma técnica computacional muito acessível e menos dispendiosa. Este método mostra a importância da introdução dos métodos estocásticos na estimação das provisões para sinistros.

Os métodos de estimação devem ser adaptados às particularidades dos ramos em estudo. Por vezes, há necessidade de melhorar as estimativas obtidas pelos métodos de estimação. Esse melhoramento pode ser obtido através da inclusão de um coeficiente de cauda nos dados, escolhido com base em várias curvas de ajustamento dos coeficientes de desenvolvimento.

No presente trabalho, alargou-se a aplicação do modelo para a estimação dos coeficientes de cauda, apresentado na secção 2.3, ao método de Bootstrap.

Os resultados obtidos, no Capítulo 5, são os esperados.

Utilizando os dados agregados de todas as Seguradoras nacionais, as particularidades de cada uma ficam diluídas e os dados são de qualidade desejável para aplicar qualquer método.

Salienta-se a importância da introdução das medidas de risco, VaR e $TailVaR$, na estimação das provisões para sinistros, pois permitem estabelecer um limiar para os montantes provisionados.

Em termos de resultados gerais, como se pode observar na Tabela 5.19, os valores apresentados até são bastante próximos, reflectindo a estabilidade dos dados utilizados.

Bibliografia

[Andrade e Silva et al., 2003] Andrade e Silva, J. M., Centeno, M. L., and Pinheiro, P. J. R. (2003). Bootstrap methodology in claim reserving. *Journal of Risk and Insurance*, 70(4):701–714.

[Bühlmann, 1967] Bühlmann, H. (1967). Experience rating and credibility. *ASTIN Bulletin*, 4(3):199–207.

[Bühlmann and Straub, 1970] Bühlmann, H. and Straub, E. (1970). Glaubwürdigkeit für schadensätze. *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker*, pages 111–133. translated to English by C. E. Brooks "Credibility for Loss Ratios" ARCH, 1972.

[Bülhmann and Gisler, 2005] Bülhmann, H. and Gisler, A. (2005). *A Course in Credibility Theory and its Applications.* Springer.

[Cabral and Guimarães, 1997] Cabral, J. A. S. and Guimarães, R. C. (1997). *Estatística.* McGraw-Hill, Lisboa.

[Denuit et al., 2008] Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., and Kaas, C. (2008). *Modern Actuarial Risk Theory using R, second ediction.* Springer.

[England and Verrall, 1999] England, P. and Verrall, R. (1999). Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving. *Insurance: Mathematics and Economics.*

[ISP, 2009] ISP (2009). Estatísticas de seguros.

[Mack, 1993] Mack, T. (1993). Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates. *Astin Bulletin*, 23(2):213–225.

[Mack, 1994] Mack, T. (1994). *Which Stochastic Model is Underlying the Chain Ladder Method?*, volume 15. Insurance: Mathematics and Economics.

[Mack, 2000] Mack, T. (2000). *Credible Claims Reserves: The Benktander Method*, volume 30 No 2. Astin Bulletin.

[Mack, 2008] Mack, T. (2008). The prediction error of bornhuetter-ferguson. *Astin Bulletin*, 38(1):87–103.

[Neuhaus, 1992] Neuhaus, W. (1992). Another pragramatic loss reserving method or borneheutter-ferguson revisited. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2:151–162.

[Neuhaus, 2008] Neuhaus, W. (2008). Lecture notes on estimating outstanding claims in general insurance. *Zabler-Neuhaus AS*.

[Norberg, 2004] Norberg, R. (2004). Credibility theory. *Wiley*, pages 398–406.

[Taylor, 2000] Taylor, G. C. (2000). *Loss Reserving - An Actuarial Perspective*. Kluwer , Boston.